Gourdon
Tauvel
Isenmann (dev 2)

Leçon 243 : Séries entières, propriétés de la somme. Exemples et applications.

I - Généralités

1. Définitions

Définition 1.1 On appelle série entière toute série de fonctions de la forme $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n z^n$ où z est une variable complexe et $(a_n)_n$ une suite complexe.

Proposition 1.2 (Lemme d'Abel) Soient $\sum_n a_n z^n$ une série entière et $z_0 \in \mathbb{C}$ tel que $(a_n z_0^n)_n$ soit une suite bornée. Alors :

(i) $\forall z \in \mathbb{C},\ |z| < |z_0| \Rightarrow \sum a_n z^n$ est absolument convergente

(ii) $\forall\, 0 < r < |z_0|,\ \sum a_n z^n$ est normalement convergente sur $\overline{B}(0,r)$

Définition - Théorème 1.3 Soit $\sum_n a_n z^n$ une série. On appelle rayon de convergence de la série entière, le nombre $R := \sup\{r \geq 0 \mid (a_n r^n)_n \text{ bornée}\}$.

On a alors :

- $\forall z \in B(0,R)$, $\sum a_n z^n$ converge absolument
- $\forall |z| > R$, $\sum a_n z^n$ diverge
- $\forall\, 0 \leq r < R$, $\sum a_n z^n$ converge normalement sur $\overline{B}(0,R)$

Le disque $B(0,R)$ est appelé disque de convergence de la série entière.

Remarque 1.4 Sur le cercle $|z| = R$, on ne peut rien dire comme le montre l'exemple $\sum z^n$ qui diverge en 1 mais converge en $e^{i\theta}$ pour $\theta \not\equiv 0\ [2\pi]$.

2. Calcul pratique du rayon de convergence

Proposition 1.5 Soient $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$ des séries entières de rayons de convergence respectifs R_a et R_b. Alors :

- si $a_n \sim b_n$ alors $R_a = R_b$
- si $|a_n| \leq |b_n|$ pour tout n, alors $R_b \leq R_a$

Théorème 1.6 (Formule de Hadamard) Le rayon de convergence R d'une série entière $\sum_n a_n z^n$ est donné par : $\frac{1}{R} = \limsup_n \sqrt[n]{|a_n|}$.

Remarque 1.7 On utilise la convention $\frac{1}{0} = +\infty$ et $\frac{1}{+\infty} = 0$.

Proposition 1.8 Soit $\sum_n a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence R. On a alors :

- si $(\sqrt[n]{|a_n|})_n$ admet une limite dans $\overline{\mathbb{R}}_+$, notée ℓ, alors $R = \frac{1}{\ell}$
- si $(a_n)_n$ ne s'annule pas à partir d'un rang et que $\left(\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}\right)_n$ admet une limite $\ell \in \overline{\mathbb{R}}_+$ alors $R = \frac{1}{\ell}$

Exemples 1.9

- $\sum \frac{z^n}{n!}$ a un rayon de convergence infini
- pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, $\sum n^\alpha z^n$ a un rayon de convergence égal à 1
- $\sum n!\, z^n$ a un rayon de convergence nul

Remarque 1.10 Les règles de Cauchy et de d'Alembert pour les séries entières ne s'appliquent pas toujours comme le montre $\sum z^{2n}$.

3. Opérations sur les séries entières

Définition - Proposition 1.11 Soient $\sum a_n z^n$, $\sum b_n z^n$ séries entières de rayons de convergence R_a et R_b, de fonctions somme f et g. La série entière $\sum c_n z^n$ avec $c_n = a_n + b_n$, est appelée somme des deux séries entières.

On a : $R_c \geq \inf(R_a, R_b)$ et sur $D(0,R_a) \cap D(0,R_b)$, $f+g$ est la fonction somme de la série entière $\sum c_n z^n$.

Définition – Proposition 1.12 Soient $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$, de rayons R_a et R_b de fonctions sommes f et g. La série $\sum d_n z^n$ où, pour tout n, $d_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$ est appelée produit de Cauchy des deux séries entières.

On a $R_d \geq \inf(R_a, R_b)$ et fg est la fonction somme de la série entière $\sum d_n z^n$ sur $D(0, R_a) \cap D(0, R_b)$.

Remarque 1.13 Pour la série entière somme, si $R_a \neq R_b$ alors $R_c = \inf(R_a, R_b)$. En revanche, si $R_a = R_b$ on ne peut conclure comme le montre l'exemple $(a_n)_n = (1)_n$ et $(b_n)_n = (-1)_n$.

II – Propriétés de la fonction somme

1. Régularité

Proposition 2.1 La fonction somme d'une série entière est continue en tout point de son disque de convergence.

Définition 2.2 On appelle série entière dérivée de la série entière $\sum_n a_n z^n$, la série entière $\sum_n (n+1) a_{n+1} z^n$.

Proposition 2.3 Une série entière et sa série entière dérivée ont même rayon de convergence.

Théorème 2.4 En tout point z_0 de son disque de convergence, la fonction somme S de la série entière $\sum a_n z^n$ est dérivable et $S'(z_0)$ est égal à la somme de la série de terme général $(n+1) a_{n+1} z_0^n$.

Corollaire 2.5 Dans le disque de convergence, la fonction somme d'une série entière est indéfiniment dérivable et : $S^{(p)}(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(n+p)!}{n!} a_{n+p} z^n$

Application 2.6 Si $R > 0$, alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n = \frac{S^{(n)}(0)}{n!}$.

Exemple 2.7

$$\forall z \in \mathbb{C}, \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!}\right)' = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!}$$

Application 2.8 Soient $\alpha_1, \dots, \alpha_p$ des entiers premiers entre eux dans leur ensemble. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note S_n le nombre de solutions $(n_1, \dots, n_p) \in \mathbb{N}^p$ de l'équation $\alpha_1 n_1 + \dots + \alpha_p n_p = n$. Alors $S_n \sim \frac{n^{p-1}}{\alpha_1 \cdots \alpha_p (p-1)!}$.

Exemple 2.9

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, dans un système monétaire $\{1, 2, 5, 10\}$, le nombre q_n de façons de faire n euros a un comportement asymptotique $q_n \sim \frac{n^3}{600}$.

développement 1

2. Principe des zéros isolés

Théorème 2.10 Soit S la somme de la série entière $\sum a_n z^n$. S'il existe une suite de nombres complexes $(z_p)_p$ tendant vers 0 et telle que pour tout p, $f(z_p) = 0$. Alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n = 0$.

Conséquence 2.11 Deux séries entières qui coïncident sur un voisinage de 0 sont égales.

Lemme 2.12 Soit Ω un ouvert de $\mathbb{C}$ vérifiant $D(0,1) \cup \{1\} \subset \Omega$. Ainsi, en considérant $Q(X) := \frac{X^M + X^{M+1}}{2}$, il existe $r > 1$ tel que $Q(D(0,r)) \subset \Omega$.

Définition 2.13 Soit $(p_n)_n \subset \mathbb{N}^*$. On dit que $(p_n)_n$ est une suite lacunaire s'il existe $\alpha > 1$ tel que $p_{n+1} \geq \alpha p_n$ pour tout n.

Théorème 2.14 (des lacunes de Hadamard) Soit $(p_n)_n$ une suite lacunaire et soit $S = \sum a_n z^{p_n}$ de rayon de convergence 1. Tous les points de $\mathcal{D}$ sont alors singuliers.

développement 2

III – Fonctions développables en série entière

Définition 3.1 Soit f une fonction définie dans un voisinage de $z_0 \in \mathbb{C}$. On dit que f est développable en série entière en z_0 s'il existe une série entière $\sum a_n z^n$ de rayon de convergence non nul et un voisinage V de z_0 dans $\mathbb{C}$ tels que pour tout $z \in V$, $f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (z - z_0)^n$.

Proposition 3.2 La fonction somme d'une série entière est analytique sur son disque de convergence.

Exemples 3.3

- $\forall z \in \mathbb{C}, \sin z = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} z^{2n+1}$
- $\forall z \in \mathbb{C}, \cos z = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} z^{2n}$
- $\forall z \in \mathbb{C}, \operatorname{sh} z = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}$
- $\forall z \in \mathbb{C}, \operatorname{ch} z = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^{2n}}{(2n)!}$
- $\forall \alpha, \forall z \in D(0,1), (1+z)^\alpha = 1 + \alpha z + \frac{\alpha(\alpha-1)z^2}{2!} + \dots + \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!} z^n + \dots$
- $\forall x \in]-1,1[, \ln(1+x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} z^n$